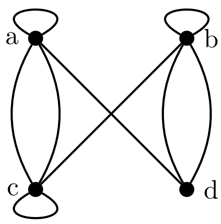
图论 2
图的表示与图同构 & 图的连通性

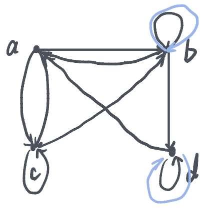
Problem 1

用邻接矩阵表示左侧的图；并画出右侧邻接矩阵表示的有向图。



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1^{?} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{2} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \cancel{2} & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \cancel{2} & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Problem 2

具有 4 个顶点的非同构简单图中，有多少个

1) 包含 C_3?

2) 无孤立点?

3) 是二部图?

1) 4个

2) 7 ~~6~~个

3) 7 ~~4~~个

Problem 3

若简单图 G 和 H 是同构的，证明 $\bar{G}$ 和 $\bar{H}$ 也是同构的。

不妨设有一个同构映射 $f: V(G) \to V(H)$.

G和H同构，则对 $\forall a, b \in G$, $ab \in E(G)$ iff $f(a)f(b) \in E(H)$.

则 $ab \notin E(G)$ iff $f(a)f(b) \notin E(H)$

即 $ab \in \overline{E(G)}$ iff $f(a)f(b) \in \overline{E(H)}$

即 $\overline{G}$ 与 $\overline{H}$ 同构

Problem 4

若简单图 G 与 $\bar{G}$ 是同构的，则 G 称为**自补图**

试证明：若图 G是自补图，则图 G的顶点数 $\mathcal{V}$满足 $\mathcal{V}\equiv 0, 1\,(mod 4)$。

v阶无向简单图有 $\frac{v(v-1)}{2}$ 条边

又其自补，则 $\frac{v(v-1)}{2}$ 为偶数，有 $4|v(v-1)$.

若余数为0，则 $v=4k$ $(k\in N^*)$，$4|v$ 满足

若余数为0，则 $v=4k+1(k\in N^*)$，$4|(v-1)$ 满足

若余数为0，则 $v=4k+2(k\in N^*)$，不满足

若余数为0，则 $v=4k+3(k\in N^*)$，不满足

综上，$v\equiv 0,1\,(mod 4)$.

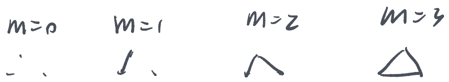
Problem 5

具有 n 个顶点的非同构的简单图有多少个？其中 n 是：

a) 2 b) 3 c) 4

a) 2个

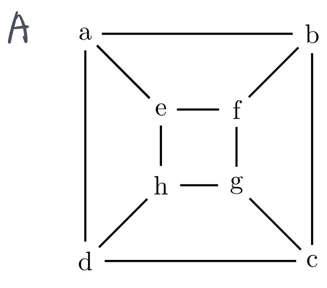
b) 4个

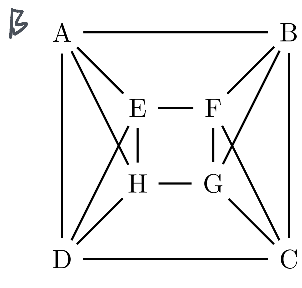


c) 11个

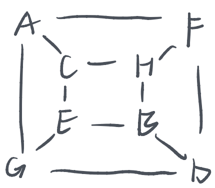
Problem 6

证明 [下左图] 和 [下右图的补图] 同构。





右图的补图:



构造双射 $f: A\to B$，$f(x)=\begin{cases} A & x=a \\ F & x=b \\ D & x=c \\ G & x=d \\ C & x=e \\ H & x=f \\ B & x=g \\ E & x=h. \end{cases}$ 边映射由点映射决定.

从而 A与B同构.

Problem 7

G 的围长是指 G 中最短回路的长；若 G 没有回路，则定义 G 的围长为无穷大。

证明：围长为 4 的 k 正则图至少有 $2k$ 个顶点，且恰有 $2k$ 个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个。

如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

设 u, v 是两相邻顶点，则 $S(u) \cap S(v) = \phi$. 否则 G 中围长为 3，矛盾.

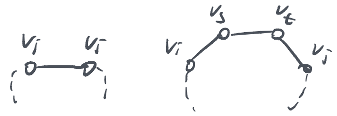
因此 G 中至少有 $2(k-1)+2 = 2k$ 个顶点.

把 $S(u) \cup \{v\}$，$S(v) \cup \{u\}$ 连成完全偶图，则得到 $2k$ 个顶点的围长为 4 的图，且作法唯一.

故得证

Problem 8

证明：简单图 G 是二部图，当且仅当 G 没有包含奇数条边的简单回路。



必要性 (⇒)：归纳奠基. 当图中仅含 4 条边的回路，则是二部图.

归纳假设. 设当图中仅含 $2k$ ($k \geq 2$) 条边的回路是二部图. v_i 与 v_j 属于不同顶点集，$v_i \in A$，$v_j \in B = V - A$.

当图中仅含 $2k+1$ 条边的回路时. 相当于在 $2k$ 中去掉边 (v_i, v_j)，增加三条边 (v_i, v_s) (v_s, v_t) (v_t, v_j).

只需 $v_i, v_t \in A$. $v_j, v_s \in B = V - A$. 即图中仅含 $2k+1$ 条边的回路也是二部图.

由数学归纳法，命题得证.

充分性 (⇐)：反证法.

如果图 G 是二部图，则对于 $A, B \subset V$, $A \cap B = \phi$. 若图中包含奇数条边的回路，则有奇数个顶点，设为 $2k+1$.

每隔一个放入 A 或 B. 设 $v_1 \in A$，$v_2 \in B$，$v_3 \in A$，…，$v_{2k} \in B$. 则 $v_{2k+1} \in A$ 与 v_1 相接，$v_{2k+1} \in B$ 与 v_{2k} 相接.

故不是二部图.

原命题得证.

Problem 9

证明：$\kappa(G) = 1$ 的 r-正则图 G，若 $r > 1$，总满足 $\lambda(G) \leq \frac{r}{2}$。（$\lambda(G)$ 表示 G的边连通度）

G 是 r-正则图且 $k(G) = 1$.

故 G 是连通的. 假设 $\lambda(G) > \frac{r}{2}$. 则 $\lambda(G) \geq \frac{r}{2} + 1$.

从 G 中任意选取 $\frac{r}{2}+1$ 个顶点集 S. S 不能形成独立集.

G 是 r-正则图. 则对 $\forall v \in V(G)$，有 $deg(v) = r$.

S 中顶点的邻点数量为 $r|S|$. 若 S 独立，则没有边相连，每一个邻点都属于 $\bar{S}$.

则补集中至少有 $r(|S| - \frac{r}{2} + 1)$ 个顶点与 S 中顶点相邻.

可以从 S 中选择一点、v 与其邻点 w，则 v 与 w 存在一条边，与 S 独立矛盾.

故假设不成立，原命题得证.

Problem 10

若无向图 G 中恰有两个奇数度的结点，则这两结点间必有一条路。

设图 G 的两个奇数度结点为 v_1 和 v_2.

从 v_1 开始构造一条迹，即从 v_1 出发经关联于 v_1 的边 e_1 到达结点 u_1.

若 $deg(u_1)$ 为偶数，则必有不同于 e_1 的边 e_2 与 u_1 关联经 e_2 到达结点 u_2 … 直到另一个奇度结点停止. (*)

因为 G 中只有两个奇度顶点 v_1, v_2.

若为 v_2 则得证.

若为 v_1 则此路为闭迹. 由于闭迹上每个节点都关联偶数条边，而 $deg(v_1)$ 为奇数

故至少有一条关联于 v_1 的边不在此闭迹上. 继续上述 (*) 操作，经有限次后必可到达 v_2.

故得证.

Problem 11

给定一个顶点个数有限的简单图 G，假定我们只可以通过如下方式逐步删除 G 中的顶点：每一步可以删除度数小于 2 的顶点。试证明：如果 G 中的所有顶点能被删除当且仅当 G 中没有回路。

必要性(⇒)：若G中所有顶点都可以被删除
则G中顶点度都小于2
不可能形成回路

充分性(⇐)：假设G中存在回路C
则C中每个顶点至少与C中另一个顶点相连
因此它们的度大于等于2，不能被删除，矛盾.
故G中不存在回路.

Problem 12

证明：G 是 2-边连通图当且仅当 G 中任意两个顶点之间至少有两条不含公共边的通路。

（提示：证明过程中可使用 Whitney 定理，但需注意和本题的差异）

必要性(⇒)：G是2-边连通图，故G没有割边
设u,v是G中任意两顶点、由G的连通性，u,v之间存在一条路径P_1，还存在与P_1无公共边的路径P_2.
设 $C=P_1\cup P_2$. 则C中含u,v的回路.
若从u到v的任意另外路径和P_1都存在公共边.
即存在边e在从u到v的任意路径中. 则从G中删除e，G就不连通. 故e是割边，矛盾.

充分性(⇐)：假设G不是2-边连通，则G中有割边.
设 $e=(u,v)$ 为G中一割边，由题，u,v处于简单回路C中.
即e在C中，从而G中删除e后仍连通. 与G中有割边矛盾.

Problem 13

假设 P 是连通图 G 中的一条最长的初级通路（点不重复），且 P 不是回路。试证明 P 的端点不是图 G 的割点。

假设P的一个端点v是图G的割点、
由于v是割点，移除v及其相邻边后，图 G−v 至少有两个连通分量.
由题，P不是回路，故P的另一个端点w与v不相邻. w在G−v的某个连通分量.
考虑G−v中不含w的连通分量. 中的任何点都不能通过一条不经v的通路到达w.
在G−v的这个连通分量中选择点u. 任何从u到w的通路都需要经过v.
而v被移除，不存在这样的通路，与G连通矛盾.
故原命题得证.

Problem 14

证明：设 G 是一个简单图，k 是一个自然数，若 $\delta(G) \geq \frac{v+k-2}{2}$，则 G 是 k-连通的。

假设G不连通，则G的连通度 $\kappa < k$.
即存在G的点割集S，使得 $|S|<k$.
且 $G-S$ 不连通. 而 $G-S$ 有 $v-|S|$ 个顶点，且至少有两个连通分支.
故必有 $G-S$ 的某个连通分支 G' 含有不超过 $\frac{v-|S|}{2}$ 个顶点.
G' 中任一个顶点只可能与 G' 内的点及S中的点相邻
从而在G中的顶点度 $\deg(x) \leq \frac{v-|S|}{2} - 1 + |S| = \frac{v+|S|-2}{2}$
由 $|S|<k$，有 $\delta(G) \leq \frac{v+|S|-2}{2} < \frac{v+k-2}{2}$，与题目矛盾.
故原命题成立.

Problem 15

设 n 阶图 G 的边数为 m，试证明：若 $m > C_{n-1}^2$，则 G 为连通图。

由鸽笼原理，$n-1$ 个顶点最多边数 $m_0 = C_{n-1}^2$（两两相连）.

此时仅有一个孤立点.

要使 $m > C_{n-1}^2$，则至少存在 $n-1$ 个顶点中的一个点与该孤立点相连.

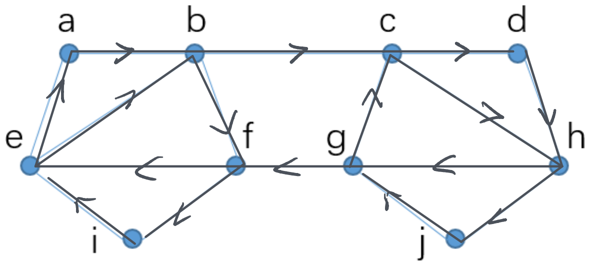
此时图 G 中没有孤立点，为连通图.

图论作业 3

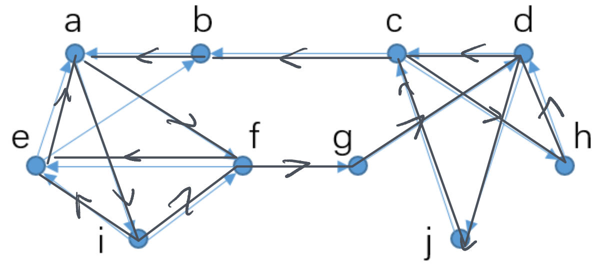
欧拉图 & 哈密尔顿图

Problem 1

试确定下方所示各图是否具有欧拉回路。若存在欧拉回路，则构造出一条欧拉回路。若不存在，试确定这个图是否具有欧拉通路。若存在欧拉通路，则构造出一条欧拉通路。



(1)



(2)

(1) 存在欧拉回路 abcdhjgchgfebfiea.

(2) 不存在欧拉回路，存在欧拉通路 ifgdchdjcbafeaieb

Problem 2

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有

1) 欧拉回路？

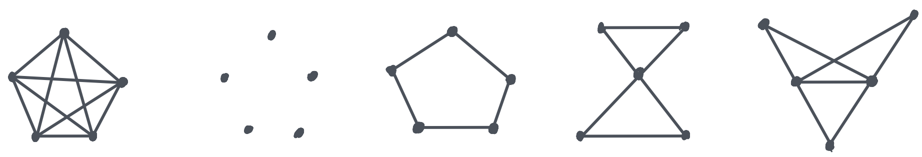
2) 欧拉通路？

1) m、n为偶数

2) m、n为偶数 $\vee$ m=1, n=1 $\vee$ m=2, n为奇数 $\vee$ m为奇数, n=2

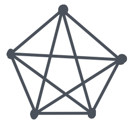
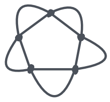
Problem 3

请找出所有互不同构的具有 5 个顶点的欧拉图（仅考虑无向简单图，画图示意即可）。



Problem 4

证明或反驳：若无向简单图 G_1 和 G_2 是顶点数、边数均相等的欧拉图，则 G_1 和 G_2 同构。

错误的：  和  是顶点数和边数均相等的欧拉图但不同构.

Problem 5

证明：带有奇数个结点的二分图没有哈密顿回路。

设 V_1、V_2 为二部图 G 的互补结点子集.

由于 G 有奇数个顶点，有 $|V_1| \neq |V_2|$.

假设 $|V_1| < |V_2|$. 设 $|V_1| = r$, $|V_2| = s$、

考虑 G 的子图 $G - V_1$，则 $G - V_1$ 有 s 个连通分支.

而 $r < s$，故 $s = p(G - V_1) > |V_1| = r$

由哈密顿图的必要条件. 图 G 不是哈密顿图

故得证

Problem 6

若无向简单图 G 有欧拉通路，证明或反驳：

1) 当 G 的顶点数是奇数时，若补图 $\bar{G}$ 是连通的，则 $\bar{G}$ 中存在欧拉通路。

2) 当 G 的顶点数是偶数时，若补图 $\bar{G}$ 是连通的，则 $\bar{G}$ 中不存在欧拉通路。

1) 证明：考虑 G 的完全图 G' 中，每一点的度均为偶数.

故 $\bar{G} = G' - G$ 的每一点度数奇偶性与 G 相同.

由于 G 中有欧拉通路，其顶点度数两奇一偶，与 $\bar{G}$ 相同.

又 $\bar{G}$ 是连通的. 故 $\bar{G}$ 有欧拉通路

2) 错误. G:  $\bar{G}$(同构意义下) ，$\bar{G}$ 存在欧拉通路.

Problem 7

试证明：对于一个简单连通图 G，若其每条边都处于奇数个初级回路（即回路中顶点不重复）中，则 G 为欧拉图。（提示：请考虑每个顶点的度）

证明：假设 G 是符合题设的一个图.

每一个顶点处于奇数个回路. 每一个回路为顶点贡献 2 个度.

故每一个顶点的度均为偶数.

由握手定理，G 中顶点度数之和为偶数.

故 G 是欧拉图.

Problem 8

友谊图：简单图 F满足 $V(F) > 2$ 且对于任意 $u, v \in V(F), u, v$ 有且仅有一个共同的相邻节点（两个人只有唯一的共同的朋友），则称 F是友谊图。

试证明：友谊图一定是欧拉图。

证明：$\forall u, v \in F$，由题，$\exists w \in F$，$(w-u) \wedge (w-v)$.

从而 uwv 为一通路，即 F 是连通图.

下证任一顶点的度均为偶数.

取 $\forall u, v \in F$，其中 $u \neq v$.

1° 若 $u-v$，则 $\exists! w \in F$，$(w-u) \wedge (w-u)$．对 w 和 u，v 是其唯一邻点.

2° 若 $\neg(u-v)$，则 $\exists w$，$(w-u) \wedge (w-v)$ 化归为1°.

即若有某一与 u 相邻的点，其可生成两个与 u 相邻的点.

从而与 u 相连的边数都为 2. 则 $deg(u) = 2k$，$k \in N^*$.

故 F 是欧拉图.

Problem 9

若简单图 G 满足 $V(G) \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq \frac{V(G)-1}{2}$，证明或反驳：

a) G 一定存在哈密顿回路。

b) G 一定存在哈密顿通路。

a) 错误的．反例  无哈密顿回路.

b) 证明：由 $\delta(G) \geq \frac{V(G)-1}{2}$，

有 $\forall x, y \in V$，$deg(x) + deg(y) \geq 2\delta(G) = V(G)-1$.

又 $V(G) \geq 3$，G是简单图，有 $deg(x)+deg(y) \geq 2$.

故 G 存在哈密顿通路.

Problem 10

所谓“子图同构”(Subgraph isomorphism) 问题是指：对于任意的图 G=$(V$,$E)$ 和图 H=$(V'$,$E')$，判定是否存在 G 的一个子图 $G_0 = (V_0, E_0)$: $V_0 \subseteq V$，$E_0 \subseteq E \cap (V_0 \times V_0)$ 使得 G_0 与 H 同构（记作 $G_0 \simeq H$）。试说明，“判断一个图是否是哈密尔顿图”这一问题可以作为上述子图同构问题的一个特例。

设存在图 G、G_0、H 满足题设.

将 H 中每个顶点与 G 中顶点进行匹配

若 H 中的边存在于 G 中则保留 G 中相应边，不存在则不考虑.

如上得到 G 的一个子图 G_0．其中 G_0 与 H 同构，则 G 是哈密顿图.

故“哈密顿图的判断”是子图同构的特例.

0

Problem 11

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有哈密尔顿回路?

$m=n\geqslant 2$

Problem 12

证明或反驳: 若 G 不是 2-连通图，则 G 不是哈密尔顿图

即证：若 G 是哈密顿图，则 G 是 2-连通图.

证：设 G 是哈密顿图，则可视作哈密顿回路上接了一些边、

去掉 G 中一顶点 e，则 $G-e$ 中仍有哈密顿通路.

从而 $G-e$ 联通，G 是 2-连通图.

Problem 13

证明或反驳: 如果二部图 G 是 H 图，那么必有偶数个顶点

是 Problem 5 的逆否命题！ 即证 Problem 5，附其解答如下：

设 V_1、V_2 为二部图 G 的互补结点子集.

由于 G 有奇数个顶点，有 $|V_1|\neq|V_2|$.

假设 $|V_1|<|V_2|$. 设 $|V_1|=r$, $|V_2|=s$、

考虑 G 的子图 $G-V_1$，则 $G-V_1$ 有 s 个连通分支.

而 $r<s$，故 $s=p(G-V_1)>|V_1|=r$

由哈密顿图的必要条件. 图 G 不是哈密顿图

故得证

Problem 15

考虑在 11 天安排 11 门课程的考试（每天考 1 门课），使得同一位老师所任的任意两门课程考试不排在接连的两天中，试证明如果没有老师担任多于 6 门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

记 11 门课为图 G 中顶点集 V.

对 $\forall x,y\in V$，若其对应的课不是同一老师，则加一边 $x-y$.

对 $\forall x\in V$，由于每个老师课数不多于 6. 从而至少 5 门课与 x 不是同一老师的

即 $\deg(x)\geqslant 5$.

从而 $\forall x,y\in V$, $d(x)+d(y)\geqslant 5+5=10=11-1$. $|V|=11\geqslant 3$. G 是简单图.

从而 G 中存在哈密顿通路

即存在符合要求的安排.

Problem 16

简单图 G满足 $|G| > 2$，令 m为 G的边数，n 为 G的顶点数。试证明：如果 $m > C_{n-1}^2 + 1$，则 G一定存在哈密尔顿回路。（提示：可使用数学归纳法证明）

设 G 不是哈密顿图，则存在两个顶点 s,t，使得 $deg(s) + deg(t) < n$.

由握手定理. $2m = \sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in V-\{s,t\}} deg(v) + deg(s) + deg(t)$

有 $2m < \sum_{v \in V-\{s,t\}} deg(v) + n$.

由于 G 除 s,t 外的 $n-2$ 个结点之间最多可构成完全图.

故 $2m < (n-2)(n-3) + n + n = n^2 - 3n + 6 = (n-1)(n-2) + 4$.

从而 $m < \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2 = C_{n-1}^2 + 2$

与 $m \geq C_{n-1}^2 + 2$ 矛盾！

故原命题成立.

图论作业 4

二部图匹配 & 最短通路 & 树的基本概念

Problem 1

以下是 *Dijkstra* 算法的一个实现：

Algorithm 1 Dijkstra 算法

1: **procedure** DIJKSTRA(G: 所有权都为正数的带权连通简单图) {G 有顶点 $a = v_1, v_2, ..., z = v_n$，相应边上的权值为 $w(v_i, v_j)$}

2:     **for** $i := 1$ **to** n **do**

3:         $L(v_i) := \infty$

4:     $L(a) := 0$

5:     $S := \emptyset$

6:     **while** $z \notin S$ **do**

7:         $u :=$ 不属于 S 的 $L(u)$ 最小的一个顶点

8:         $S := S \cup \{u\}$

9:         **for** 所有不属于 S 的且属于 $N(u)$ 的顶点 v **do**

10:             $L(v) := \min\{L(v), L(u) + w(u, v)\}$

    {向 S 中添加带最小标记的顶点，并且更新不在 S 中的顶点的标记}

11: **return** $L(z)$ {$L(z) =$ 从 a 到 z 的最短通路的长度}

证明：*Dijkstra* 算法第 8 行每次更新 S 时，当前的 L 对于要加入的 u 都满足 $L(u)$ 等于 a 到 u 最短路的权值。

证明：强数学归纳法

归纳奠基：第 1 次更新，新加入的点是 a，由于 $L(a)=0$，而 a 到自身的最短路权值为 0，故成立.

归纳假设：假设当 $S<k$ 时，结论均成立.

当 $S=k+1$ 时：对 $\forall x \in S \wedge x-u$，过 x 从 a 到 u 的最短通路一定由 a 到 x 的最短通路和 x 与 u 之间的边组成.

由于 x 在某次更新中进入 S，故由假设，$L(x)$ 是从 a 到 x 的最短通路长度.

从而，从 a 到 u 的最短通路是 $L(x)+w(x,u)$.

由 $L(u)=\min\{L(u), L(x)+w(x,u)\}$. 故 $a \cdots x \cdots u$ 在更新后符合上式

由 x 的任意性，有：$L(u)$ 代表除终点外只含 S 中的点中从 a 到即将加入的 u 的最短通路长度.

若 $L(u)$ 不是 a 到 u 的最短路权值，则由上，存在一条含 S 外的点 a 到 u 的通路

设此通路中第一个不属于 S 的点为 v，则 $L(v) <$ $a \cdots v \cdots u$ 的长度 $< L(u)$

则 u 不是最小点，矛盾.

故 $L(u)$ 是 a 到 u 的最短路权值

由数学归纳法，原命题得证.

Problem 2

下面是 $Floyd$ 算法的一个实现，它求出了任意点对间所有边权的和最小的通路的长度，请尝试修改该算法中相应的行，解决下问题（无需证明修改的正确性）:

Algorithm 2 Floyd 算法

1: **procedure** FLOYD(G: 带权简单图) $\{G$ 有顶点 $v_1, v_2, ..., v_n$，相应边上的权值为 $w(v_i, v_j)\}$
2: **for** $i := 1$ **to** n **do**
3:   **for** $j := 1$ **to** n **do**
4:    **if** $(v_i, v_j) \in E(G)$ **then**
5:     $d(v_i, v_j) := w(v_i, v_j)$
6:    **else**
7:     $d(v_i, v_j) := \infty$
8: **for** $i := 1$ **to** n **do**
9:   **for** $j := 1$ **to** n **do**
10:    **for** $k := 1$ **to** n **do**
11:     **if** $d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k) < d(v_j, v_k)$ **then**
12:      $d(v_j, v_k) := d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k)$
$\{d(v_i, v_j)$ 是在 v_i 与 v_j 之间的最短通路的长度，为 ∞ 时表示通路不存在$\}$

a) 对于任意边权大于 1 的图 G，对于任意点对 a, z，试求 a 到 z 的通路上所有边的权值乘积最小可以是多少;，下同）

11: *if* $d(v_j, v_i) \cdot d(v_i, v_k) < d(v_j, v_k)$ *then*
12: $d(v_j, v_k) := d(v_j, v_i) \cdot d(v_i, v_k)$

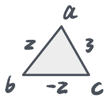
b) 定义一条通路的“强度”为通路上权最小的边的权值（例如，由权值依次为 $3, 5, -2, 1$ 的边组成的通路强度为 -2），对于任意点对 a, z，试求 a 到 z 的最强的通路的强度可以是多少。

11: *if* $d(v_j, v_k) < \min\{d(v_j, v_i), d(v_i, v_k)\}$ *then*
12: $d(v_j, v_k) := \min\{d(v_j, v_i), d(v_i, v_k)\}$

Problem 3

若边的权可以为负数，$Dijkstra$ 算法能否正确求出最短路？若可以，请给出证明；若不能，请举出一个反例并分析说明。

不能. 反例



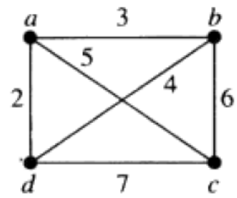
Dijkstra算法求 a 到 b 的通路.

先将 b 加入，$L(b)=2$，此后不变.

而最短通路为 a-c-b，长度为1.

Problem 4

通过下列两种方法来解决下图的旅行商问题。



a) 求出所有哈密顿回路的总权数并且确定出总权数最小的回路；

b) 采用最邻近算法，以顶点 b 为始点找到近似最短的哈密尔顿回路；

a) $(abcda) = 3+6+7+2 = 18$

$(adbca) = 2+4+6+5 = 17$

$(abdca) = 3+4+7+5 = 19$

总权数最小的回路：abdca

b) b-a-d-c-b

Problem 5

G 的围长是指 G 中最短回路的长；若 G 没有回路，则定义 G 的围长为无穷大。证明：围长为 4 的 k 正则图至少有 2k 个顶点，且恰有 2k 个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个。

证明：设 u、v 是G中两相邻顶点，则 $S(u) \cap S(v) = \phi$.

否则 G 中围长为3，矛盾.

因此，G中至少有 $2(k-1)+2$ 个，即2k个顶点.

把 $S(u) \cup \{v\}$，$S(v) \cup \{u\}$ 连为完全偶图，则唯一得到2k个顶点的围长为4的图.

Problem 6

描述如何调用已知的求两点间最短通路长度的算法解决下列求简单加权（权均为正数）连通图上的有限制的最短通路长度问题：

a) 求从顶点 v_i 出发到达 v_j，且经过顶点 v_k 的最短通路长度（为保证通路最短，可以经过同一个顶点多次）；

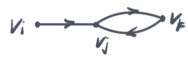
b) 求从顶点 v_i 出发到达 v_j，且不经过顶点 v_k 的最短通路长度；

c) 求从顶点 v_i 出发，先经过顶点 v_k，再到达顶点 v_j 的最短通路长度（即在到达 v_k 前不得经过顶点 v_j）；

a) 先由Dijkstra算法，求出 v_i 到 v_j 的最短通路，若含 v_k，则结束.

若不含 v_k，则 1° v_i 出发先过 v_k 再过 v_j，此时转化为 c).

2° v_i 出发过 v_j 后再过 v_k，再返回 v_j.

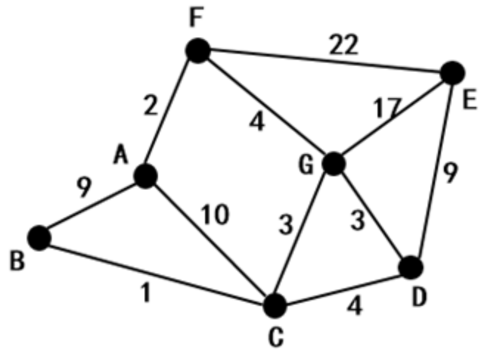
此时 v_i 到 v_j 是之前求过的. 再次用Dijkstra算法求 v_j 到 v_k 之间最短通路. 即 

比较 1° 与 2° 的长度，取更短的即可.

b) 用Dijkstra算法，只需将所有以 v_k 为端点的边权值赋为 $+\infty$.

c) 用Dijkstra算法分别求 v_i 到 v_k 和 v_k 到 v_j 的最短通路. 即 

Problem 7



求下图中以 A 为源点到图中其他所有点的最短路径。

$A \to B$: AB

$A \to C$: AFGC

$A \to D$: AFGD

$A \to E$: AFGDE

$A \to F$: AF

$A \to G$: AFG

Problem 8

证明：二部图 G是简单图且有 $\mathcal{V}$个顶点 $\mathcal{E}$条边，证明 $\mathcal{E} \leq \mathcal{V}^2/4$。

证明：设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是二部图. $|V_1| = v_1$ $|V_2| = v - v_1$.

则 $\mathcal{E} \leq v_1(v - v_1) = \frac{v^2}{4} - \frac{v^2}{4} + v_1 v - v_1^2 = \frac{v^2}{4} - (\frac{v}{2} - v_1)^2 \leq \frac{v^2}{4}$.

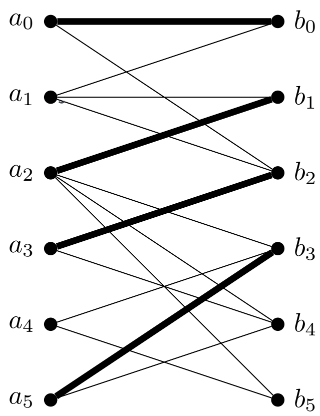
Problem 9

往 2n 个孤立的顶点间加入 n 条边，试求总共能得到多少种不同的包含这 2n 个顶点的完美匹配?

$$N = C(2n,n) = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Problem 10

从下图 $G = (A, B, E)$ 中，找出相对于匹配 M(粗边的集合) 的任意三条交错路径 (alternating path) 和至少两条增广路径 (augmenting path)，然后利用增广路径扩大 M 来找到最大匹配。



交错路径：$a_1b_1a_2b_3a_5$ $a_1b_1a_2b_4$ $a_1b_2a_3b_4$ $b_0a_0b_2a_3b_4$

增广路径：$a_1b_1a_2b_4$ $a_1b_2a_3b_4$

扩大：$\underline{b_0}a_1b_1a_2b_4\underline{a_3} \Rightarrow \underline{a_0}b_0a_1b_1a_2b_4a_3\underline{b_2} \Rightarrow a_0b_0a_1b_1a_2b_4a_3b_2\underline{a_4}$

$\Rightarrow a_0b_0a_1b_1a_2b_4a_3b_2a_4\underline{b_3} \Rightarrow a_0b_0a_1b_1a_2b_4a_3b_2a_4b_3\underline{a_5b_5}$

故存在 a_0b_0 a_1b_1 a_2b_4 a_3b_2 a_4b_3 a_5b_5 的最大匹配

Problem 11

对于哪些 n 值来说，下列图是存在完美匹配的二部图?

a) K_n $n=2$

b) C_n n 为偶数

c) Q_n $n \in \mathbb{N}^*$

Problem 12

令 k 为一整数。对于任意有限集合，证明对它的任意两个 k 划分都存在一个相同的代表集。

- 集合的 k **划分**指划分为大小相同的互不想交的 k 个子集，为简便起见，设集合的大小为 k 的整数倍从而每个子集均有相同个元素。
- 一个划分的**代表集**指从每个子集中取出一个元素而构成的集合。

举例：集合 $\{1,2,3,4\}$ 的一个 2 划分为 $A:\{1,2\}\{3,4\}$。此划分的代表集有 $\{1,3\}$,$\{2,3\}$,$\{1,4\}$,$\{2,4\}$，但 $\{1,2\}$ 不是其代表集。集合的另外一个划分为 $B:\{2,3\}\{1,4\}$。易见，A 与 B 存在相同的代表集 $\{1,3\}$。

证明：记集合 S 的两个划分含有的子集族为 $A_1,\cdots,A_k$ 和 $B_1,\cdots,B_k$. 每个子集元素数为 m.

考察二部图 $G(V_A,V_B,E)$. 共有 $2k$ 的点，每点对应 A_i 或 B_j.

对 $\forall i,j\in N^* \land 1\le i,j\le k$，若 $\exists a\in S$，使得 $(a\in A_i)\land(a\in B_j)$，则对应点满足 $e_{A_i}-e_{B_j}$

对 $\forall n\in N^* \land 1\le n\le k$，A、B中任意 k 个点度数和为 mn.

则A中 k 个点至少与B中 k 个点相邻，否则B中存在度数小于 m 的点，

由 Hall 定理，存在 A、B 之间点的完美匹配.

取他们相同的一个元素加入各自的代表集，则两代表集相同.

Problem 13

假设某校计算机系学生选导师时出现了这样的情况：对于每一位学生，至少对 k 名导师感兴趣；对于每一位导师，至多有 k 名学生对他感兴趣。假设每位导师只能指导 1 名学生，且每位学生也只能选择 1 名导师。试证明：存在这样的匹配，使得每位学生都能选到自己感兴趣的导师。

同 Problem 12.

将学生和导师作为二部图的两部分 V_1、V_2. 学生点集 $V_1=\{v_1,\cdots,v_n\}$，导师点集 V_2.

对 $\forall v_i\in V_1$，$u\in V_2$，若 v_i 学生对 u 导师感兴趣，则 v_i-u.

$\forall 1\le m\le n$，取 V_1 中 m 个顶点 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_m}$，它们度数之和为 mk，

V_2 中 m 个点度数也为 mk.

从而这 m 个顶点至少与 V_2 中的 m 个点相邻.

由 Hall 定理，存在学生和导师之间的完美匹配.

Problem 14

证明一个 6×6 的方格纸板挖去左上角和右下角后不能用剪刀裁剪成若干 1×2 的小矩形。

将格子相间地涂上黑色，则黑-白形成了一个二部图.

由于每个 1×2 长方形含两相邻小正方形，

故黑白色相等形成完美匹配.

而图中黑块 16个，白块 18个. 故不能形成完美匹配.

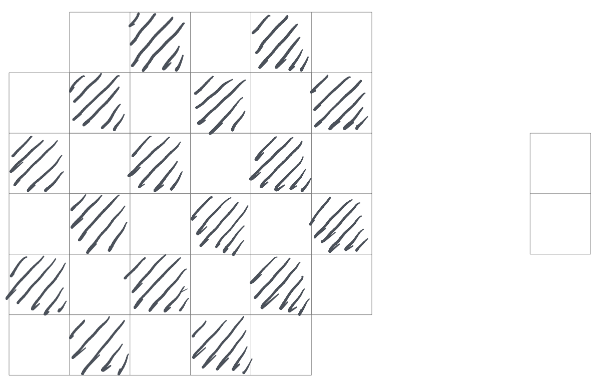


Figure 1: 第 14 题图

Problem 15

计算下列各题:

1) 有多少非同构的 4 个顶点的树?

2) 饱和碳氢化合物 C_4H_{10} 有多少不同的同分异构体?

3) 有多少由 4 个不可区分的顶点构成的二叉树?

4) K_4 有多少个不同的生成树?（假设各条边互不相同）

(1) 2个

(2) 2个

(3) 14个

(4) 16个

Problem 16

二叉搜索树 (BST) 是节点带标号的有序二叉根树，其所有的子树都满足根节点标号大于左子树中所有节点的标号，而小于右子树中所有节点标号。记 C_n 为以 1,2,⋯,n 为各节点标号的不同的 BST 的个数。请利用基本计数原理给出 C_n 的递推公式. 这里我们约定 C_0=1。

对于有n个元素的BST，其根节点有n种可能.

假设根节点为i，左子树包括了 1~i-1 这 i-1个元素，右子树包括了 i+1~n这 n-i个元素.

$$C_n = C_{n-1} + \sum_{i=1}^{n} (C_{i-1} \times C_{n-i})$$

Problem 17

证明或反驳：所有边数不超过图 G 的最小顶点度的树都与图 G 的某个子图同构（只考虑简单图）。

对树的边数 k 进行归纳

k=1 时，T是K_2，G最小度至少为1，因此一定有K_2子图.

k=2 时，T是 三个顶点依次连接形成的无环路径，G最小度至少为2.

至少有3个顶点，一定有子图满足

假设对于边数为 k-1 (k≥3) 的每个树T'，以及最小度至少为k-1的每个图G'，T'同构于G'的某个子图.

对于边数为k的树T，设v是T的一个叶子节点，u是T中与v邻接的顶点，则T-v是边数为k-1的树.

由于G的最小度至少为k，因此满足最小度至少为k-1.

由归纳假设，T-v 一定同构于G的某个子图F.

设u'是T中u对应的F中的顶点，由于deg(u')在G中≥k，因此u'连接到G中某个不属于F的顶点w.
因此 T同构于 F+w 和 wu' 的子图.

Problem 18

标记树是其中每个顶点都指定了标记的树。当在两个标记树之间存在保持顶点标记的同构时，就称这两个标记树是同构的。

用集合 $\{0,1,2\}$ 里不同的数来标记三个顶点的、非同构的标记树有多少种？用集合 $\{0,1,2,3\}$ 里不同的数来标记四个顶点的、非同构的标记树有多少种？

三顶点树只有 S_2 一种. 两个树不同构仅当度为2的点标记不同, 故有3种非同构的标记树.

四顶点树有 S_3、P_4 两种. S_3 有4个不同的标记树, P_4 下共有 $\frac{A(4)}{2}=12$ 个, 共计有16个非同构的标记树.

Problem 19

令 $D=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为一正整数序列，且 $n\geq 2$。

a) 若 D 恰好是某个树 T 的各个顶点的度数序列，试证明

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$$

b) 反过来，试证明：若 D 满足上式，则存在一个树 T，使得 D 恰好是 T 的各个顶点的度数序列。

a) 树T的边数为 $n-1$ ， 由握手定理, $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.

b) 对n进行归纳.

归纳奠基: 当 $n=2$ 时, 显然成立.

归纳假设: 对于 $2\leq n=k-1$ 时成立.

对 $n=k$ 时, D中存在 $d_i=1$, 否则 $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n$; 也必有 $d_j>1$, 否则 $\sum_{i=1}^{n} d_i < 2(n-1)$

考虑 $D'=(D-\{d_i,d_j\})\cup\{d_j-1\}$.

则 D' 满足假设, 存在一个树T的各个顶点的度数序列恰是 D'.

在T中添加一个节点并连接到对应于 d_j-1 的节点上

则D恰是新树顶点的度数序列.

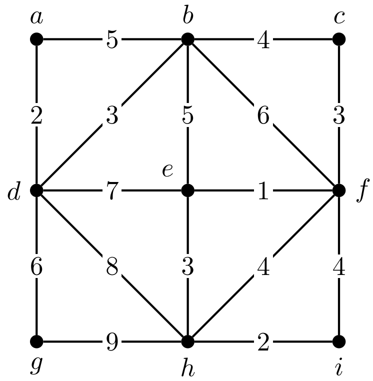
图论作业 5

生成树 & 树的应用

如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

Problem 1

分别用普林（Prim）算法和克鲁斯卡尔（Kruskal）算法求所给带权图的最小生成树。(按顺序写出选取的边及总的权值即可)



答案： 最小生成树权值应为 24。

Prim 选边序列：$(a,d),(d,b),(b,c),(c,f),(f,e),(e,h),(h,i),(d,g)$

Kruskal 选边序列：$(e,f),(a,d),(h,i),(b,d),(c,f),(e,h),(b,c),(d,g)$

Problem 2

试求以下无向带权图的最小生成树 T（请直接将图中所求最小生成树的边加粗），并求此最小生成树的权值 $W(T)$.

答案：

$W(MST)$=1+2+2+3+3+4+5=20

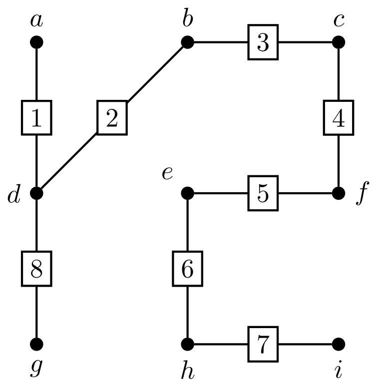


Figure 1: *

Prim

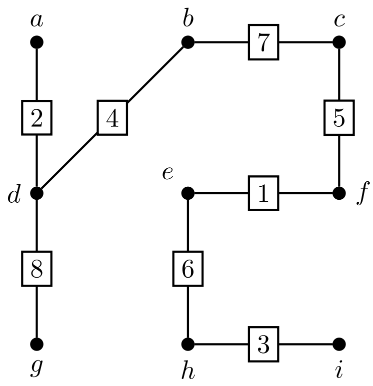


Figure 2: *

Kruskal

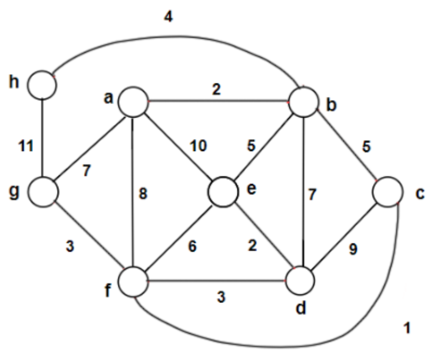
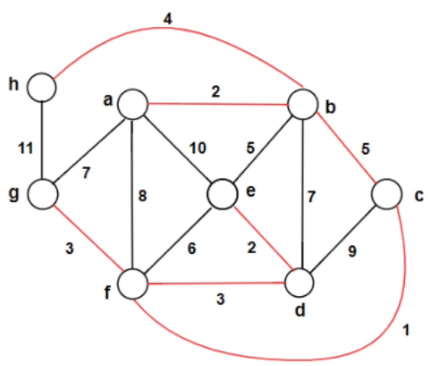


Figure 3: 第七题图



Problem 3

证明或反驳：每条边权重均不相同的带权图

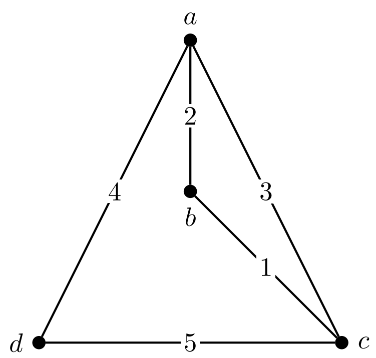
1) 有唯一的最小生成树。

2) 有唯一的“次小生成树”满足，存在一最小生成树的权值小于等于该树，且其他生成树的权值均大于等于该树。

答案：

1) 反证，记不同的最小生成树 T, T' 边集按权重从小到大排序为 $T = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}, T' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_{n-1}\}$。因为 $T \neq T'$，必存在最小的 $k < n$ 使得 $e_k \neq e'_k$，不妨令 $w(e'_k) < w(e_k)$，将 e'_k 加入 T，得到的 $T + e'_k$ 中有一个包含 e'_k 的圈 C，因为 $\{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e'_k\} = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_k\} \subseteq T'$ 无环，所以存在 $t > k.e_t \in C$，删去 e_t 得到 G 的另一个生成树 $T + e'_k - e_t$，$w(T + e'_k - e_t) = w(T) + w(e'_k) - w(e_t) < w(T) + w(e'_k) - w(e_k) < w(T)$，与 T 是 G 上的最小生成树矛盾。

2) 反驳，如下图
 最小生成树 $\{(a, b), (b, c), (a, d)\}$，次小生成树 $\{(b, c), (a, c), (a, d)\}$ 和 $\{(a, b), (b, c), (c, d)\}$



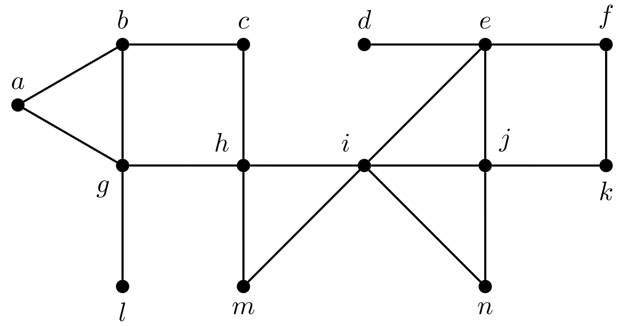
Problem 4

令 G 为一无向带权连通图，假设图中存在一个回路. 试证明：在此回路上若存在一条边 e 其权值严格大于此回路上的其它各边，则 e 不在 G 的任何最小生成树中。

答案： 不妨假设该回路 C 是顶点不重复的简单回路，设 $e = uv$。以下使用反证法来证明 e 不在任何最小生成树中，假设 T 是包含 e 的最小生成树。$T - \{e\}$ 必含两个连通分支，设为 $T1, T2$。$C - \{e\}$ 是图 G 中的 uv-通路，其中必有一边满足其两个端点 x,y 分别在 $T1, T2$ 中，设其为 e'。$T' = T - \{e\}\ \{e'\}$，显然 T' 是生成树。因 e 的权重大于 e' 的权重，T' 的权重比 T 更小，矛盾。所以，e 不在任何最小生成树中。

Problem 5

用深度优先搜索和广度优先搜索来构造下图的生成树。选择 a 作为这个生成树的根，并假定顶点都以字母顺序来排序。



答案： DFS：$\to a, a \to b, b \to c, c \to h, h \to g, g \to l, h \to i, i \to e, e \to d, e \to f, f \to k, k \to j, j \to n, i \to m$

BFS：$\to a, a \to b, a \to g, b \to c, g \to h, g \to l, h \to m, h \to i, i \to e, i \to j, i \to n, e \to d, e \to f, j \to k$

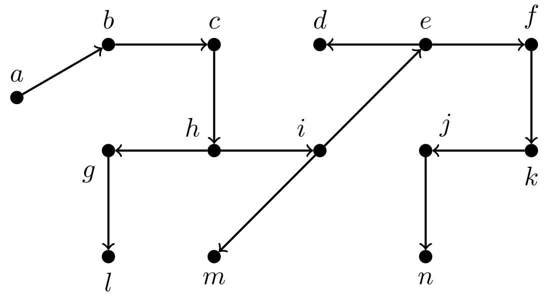


Figure 4: *

DFS

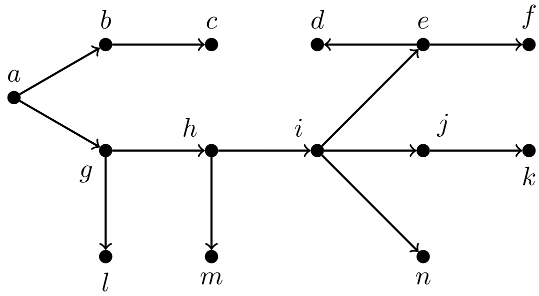
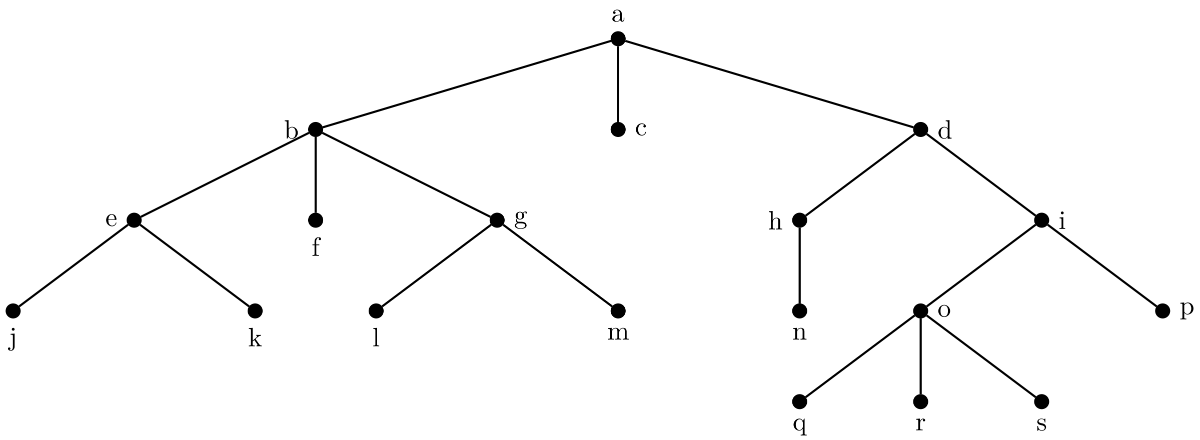


Figure 5: *

BFS

Problem 6

确定前序遍历、中序遍历和后续遍历下所给的有序根树的顶点的顺序。



答案： 前序：$a,b,e,j,k,f,g,l,m,c,d,h,n,i,o,q,r,s,p$；

中序：$j,e,k,b,f,l,g,m,a,c,n,h,d,q,o,r,s,i,p$；

后序：$j,k,e,f,l,m,g,b,c,n,h,q,r,s,o,p,i,d,a$。

Problem 7

求下列前缀/后缀表达式的值（$a \uparrow b = a^b$）

a) $- \quad \times \quad 6 \quad / \quad 4 \quad 2 \quad 3$

b) $\times \quad + \quad 3 \quad + \quad 3 \quad \uparrow \quad 3 \quad - \quad 3 \quad 3 \quad 3$

c) $5 \quad 2 \quad 0 \quad - \quad - \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad + \quad + \quad \times$

d) $4 \quad 2 \quad \times \quad 2 \quad \uparrow \quad 6 \quad 2 \quad - \quad 6 \quad 3 \quad / \quad \times \quad -$

e) $\uparrow \quad - \quad \times \quad 4 \quad 4 \quad \times \quad 7 \quad 2 \quad + \quad 3 \quad 8$

f) $\times \quad / \quad 9 \quad 3 \quad + \quad \times \quad 2 \quad 3 \quad - \quad 9 \quad 4$

答案：

a) $-(\times(6,/(4,2)),3) = -(\times(6,2),3) = -(12,3) = \mathbf{9}$

b) $\times(+(3,+(3,\uparrow(3,-(3,3)))),3) = \times(+(3,+(3,\uparrow(3,0))),3) = \times(+(3,+(3,1)),3) = \times(7,3) = \mathbf{21}$

c) $((5,(2,0)-)-,(1,(3,4)+)+)\times = ((5,2)-,(1,7)+)* = (3,8)\times = \mathbf{24}$

d) $(((4,2)\times,2)\uparrow,((6,2)-,(6,3)/)\times)- = ((8,2)\uparrow,(4,2)\times)- = (64,8)- = \mathbf{56}$

e) $\uparrow(-(\times(4,4),\times(7,2)),+(3,8)) = \uparrow(-(16,14),11) = \uparrow(2,11) = \mathbf{2048}$

f) $\times(/(9,3),+(\times(2,3),-(9,4))) = \times(3,+(6,5)) = \times(3,11) = \mathbf{33}$

Problem 8

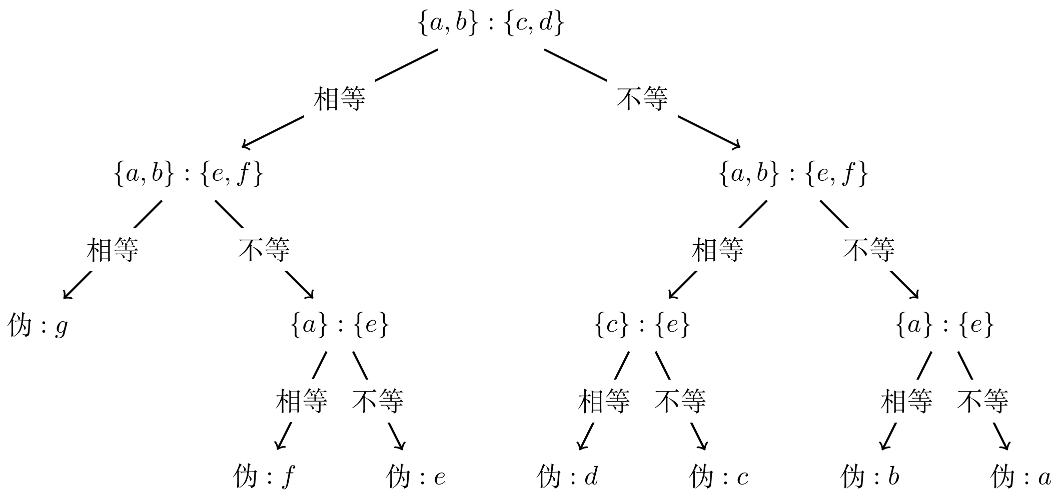
若一枚伪币与其他硬币质量不等，那么为了在 7 枚硬币中找出这枚伪币，用天平称量找出伪币的方案在最坏情况下最少要多少次？并给出相应方案（画出决策树）。

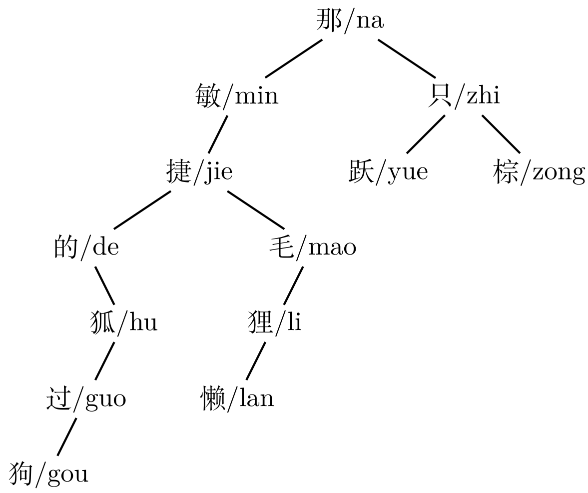
答案： 每次称量有 {相等, 不等} 两种情况，因此决策树是二元树，最终情况（叶节点数）有 7 种。将硬币编号为 $a,b,\ldots,g$，有方法如下图：最坏情况下决策树的高度为 3，即 3 次。

Problem 9

用字典序构造下面句子里的拼音字的二叉搜索树：“na zhi min jie de zong mao hu li yue guo na zhi lan gou”(那只敏捷的棕毛狐狸跃过那只懒狗。)

答案：


$\{a,b\}:\{c,d\}$
相等
不等
$\{a,b\}:\{e,f\}$
$\{a,b\}:\{e,f\}$
相等
不等
相等
不等
伪 : g
$\{a\}:\{e\}$
$\{c\}:\{e\}$
$\{a\}:\{e\}$
相等
不等
相等
不等
相等
不等
伪 : f
伪 : e
伪 : d
伪 : c
伪 : b
伪 : a


那/na
敏/min
只/zhi
捷/jie
跃/yue
棕/zong
的/de
毛/mao
狐/hu
狸/li
过/guo
懒/lan
狗/gou

Problem 10

a) 用赫夫曼编码来编码具有这些频率的符号：$a : 0.36$, $b : 0.18$, $c : 0.18$, $d : 0.10$, $e : 0.08$, $f : 0.06$, $g : 0.04$，在算法中用以下两种不同的方式打破平局。

  I. 在算法的每个阶段从权最小的树中选择顶点数最多的两个树来组合。

  II. 在每个阶段从权最小的树中选择顶点数最少的两个树来组合。

b) 计算用每种编码来编码一个符号所需要的平均位数并且对每种编码计算这个位数的方差。对于编码一个符号所需要的位数的方差，哪种打破平局的过程所产生的会小一些?

答案: 一种方案如图所示

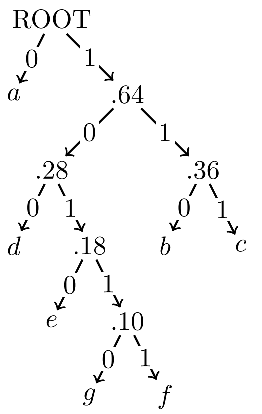


Figure 6: *

I

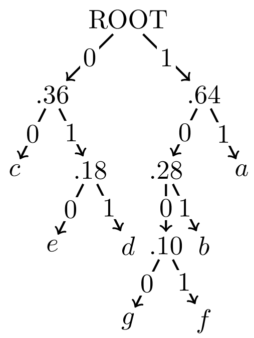


Figure 7: *

II

平均值:

$$\text{avg(I)} = 0.36 \times 1 + 0.18 \times 3 + 0.18 \times 3 + 0.10 \times 3 + 0.08 \times 4 + 0.06 \times 5 + 0.04 \times 5 = 2.56$$

$$\text{avg(II)} = 0.36 \times 2 + 0.18 \times 3 + 0.18 \times 2 + 0.1 \times 3 + 0.08 \times 3 + 0.06 \times 4 + 0.04 \times 4 = 2.56$$

方差:

$$\text{var(I)} = 0.36 \times 1^2 + 0.18 \times 3^2 + 0.18 \times 3^2 + 0.10 \times 3^2 + 0.08 \times 4^2 + 0.06 \times 5^2 + 0.04 \times 5^2 - 2.56^2 = 1.7264$$

$$\text{var(II)} = 0.36 \times 2^2 + 0.18 \times 3^2 + 0.18 \times 2^2 + 0.10 \times 3^2 + 0.08 \times 3^2 + 0.06 \times 4^2 + 0.04 \times 4^2 - 2.56^2 = 0.4464$$

(II) 的方差更小

Problem 11

令 G 为一无向带权连通图，假设图中存在一个回路. 试证明：在此回路上若存在一条边 e 其权值严格大于此回路上的其它各边，则 e 不在 G 的任何最小生成树中。

答案：不妨假设该回路 C 是顶点不重复的简单回路，设 $e = uv$。以下使用反证法来证明 e 不在任何最小生成树中，假设 T 是包含 e 的最小生成树。$T - \{e\}$ 必含两个连通分支，设为 $T1, T2$。$C - \{e\}$ 是图 G 中的 uv-通路，其中必有一边满足其两个端点 x,y 分别在 $T1, T2$ 中，设其为 e'。$T' = T - \{e\} \{e'\}$，显然 T' 是生成树。因 e 的权重大于 e' 的权重，T' 的权重比 T 更小，矛盾。所以，e 不在任何最小生成树中。